ЛР Образовательный Центр “Лучшее Решение”
www.лучшеерешение.рф

Логарифмические неравенства –
решаем эффективно

Автор: Астрахарчик Нина Алексеевна
учитель математики
МОУ «Лицей города Троицка»,
г. Москва.

В статье рассматривается решение логарифмических неравенств с помощью равносильного перехода от логарифмического неравенства к алгебраическому, условия равносильного перехода и типы неравенств, которые можно решить с помощью данного метода. Достоинство данного метода заключается в его эффективности - значительном сокращении выкладок и, как следствие, уменьшении времени на решение.

Метод, который мы будем использовать для решения задач, часто называют методом рационализации, т.к. он позволяет перейти от неравенства, содержащего сложные показательные, логарифмические и т.п. выражения, к равносильному ему более простому рациональному неравенству. Для этого напомним определение равносильных уравнений и неравенств.

Равносильность

Равносильными или эквивалентными называются уравнения (неравенства), множества корней которых совпадают. Таким образом, равносильными также считаются уравнения (неравенства), которые не имеют корней.

Раньше методом рационализации неравенства не решали, его не знали. Это "новый современный эффективный метод решения показательных и логарифмических неравенств" (цитата из книги Колесниковой С.И.).

Именно после издания этой книги метод стал стремительно распространяться. Действительно, его применение позволяет значительно сэкономить время, что немаловажно при сдаче ЕГЭ по математике.

Метод рационализации при решении логарифмических неравенств:
неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ сводится к решению системы неравенств в которую мы напишем ОДЗ логарифмических функций $a(x)>0$; $a(x)\neq 1$, а также $f(x)>0$;$g(x)>0$ и допишем неравенство

$$(a(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0$$

В результате количество вычислений, приводящих к ответу, уменьшается примерно в два раза, что экономит не только время, но и позволяет потенциально сделать меньше арифметических ошибок и ошибок “по невнимательности”.

Пример1.

$$\log_{x-1}(2x+1) \leq 2.$$

Сравнивая с (1) находим $a(x) = x-1$, $b(x) = 2x+1$, $c(x) = (x-1)^2$.

Переходя к (2) будем иметь:

$$\log_{x-1}(2x+1)\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2x+1-(x-1)^2}{x-2}\le 0\\ x-1>0\\ 2x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{x(x-4)}{x-2}\le 0\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;2)\cup[4;+\infty).$$

Пример 2.

$$\frac{\lg x}{x^2-x-6}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x-1}{(x+2)(x-3)}\ge 0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;1]\cup(3;+\infty).$$

Задачи для самостоятельного решения.

1.

Решите неравенство $2\log_{\left(x^2-4x+5\right)^2}\left(4x^2+1\right)\le \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)$.

2.

Решите неравенство $\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2$.

3.

Решите неравенство $\log_{\log_x 2x}(5x-2)\ge 0$.

Литература.

1. ЕГЭ 2015. Математика. Типовые экзаменационные материалы под редакцией И.В. Ященко. Издательство «Национальное образование». Г. Москва. 2015.

2. С.И. Колесникова. Показательные и логарифмические неравенства. Издательство «Азбука-2000, г. Москва.2010.

3. http://egemaximum.ru

4. http://festival.1september.ru/articles/611132